

教师资格考试标准预测试卷
数学学科知识与教学能力（初级中学）
参考答案及解析（一）~（五）

（科目代码：304）

目 录

教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)标准预测试卷(一)参考答案及解析	(1)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)标准预测试卷(二)参考答案及解析	(6)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)标准预测试卷(三)参考答案及解析	(12)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)标准预测试卷(四)参考答案及解析	(17)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)标准预测试卷(五)参考答案及解析	(23)

教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)

标准预测试卷(一) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】D。解析：因为 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$, $g(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x+1)^2(x+2)$, 所以 $(f(x), g(x)) = (x+1)$ 。故本题选 D。

2. 【答案】A。解析：由题意可知，向量 $m = (1, 2, 3)$ 是直线 l' 的一个方向向量；向量 $n = (2, 3, 4)$ 是平面 π 的一个法向量。因为直线 l 与直线 l' 垂直，与平面 π 平行，所以直线 l 的方向向量与向量 m, n 都垂直，于是向量 $m \times n = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$ 就是直线 l 的一个方向向量，再结合直线 l 经过原点可得，直线 l 的方程为 $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ ，也即 $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ 。故本题选 A。

3. 【答案】B。解析：计算函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的左、右极限， $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) \frac{x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ae^{x^4} - 1 = a - 1$ 。若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在，则 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ，即 $1 = a - 1$ ，所以 $a = 2$ 。故本题选 B。

4. 【答案】B。解析：分别计算矩阵 A 和矩阵 B 的特征值得， A 的特征值为 1(二重)，-1； B 的特征值为 3(二重)，-1。由于 A 与 B 的特征值不同，所以 A 与 B 不相似，但(同阶矩阵) A 与 B 的秩和正、负惯性指数相等，所以 A 与 B 合同。故本题选 B。

5. 【答案】C。解析：已知 $P(M|N) = \frac{P(MN)}{P(N)} = 1$ ，所以 $P(MN) = P(N)$ ，于是 $P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(MN) = P(M)$ 。故本题选 C。

6. 【答案】D。解析：由题意， $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，且 $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$ ，所以当 $x \rightarrow 0$ 时，结合等价无穷小 $\ln(1+x^2) \sim x^2$ 可得， $f[\ln(1+x^2) + 1] = f(1) + f'(1)\ln(1+x^2) + o(\ln(1+x^2)) = x^2 + o(x^2)$ ，于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f[\ln(1+x^2) + 1]}{(\sqrt{1+x} - 1)\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2}} = 2$ 。故本题选 D。

7. 【答案】C。解析：“大角对大边”是定性地描述三角形的边和角的关系，而“正弦定理”——在 $\triangle ABC$ 中内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ，三角形外接圆的半径为 R ，则有 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ——是定量地给出了三角形的边和角的关系，所以这个研究过程的思路主要表现为从定性到定量。故本题选 C。

8. 【答案】D。解析：《义务教育数学课程标准(2011年版)》对义务教育数学课程总目标的叙述为：“通过义务教育阶段的数学学习，学生能：①获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验；②体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，运用数学的思维方式进行思考，增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力；③了解数学的价值，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的信心，养成良好的学习习惯，具有初步的创新意识和实事求是的科学态度”。故本题选 D。

二、简答题

9. 【参考答案】

A, B, C 至少发生一个的概率是 $P(A \cup B \cup C)$ ，根据加法公式可得， $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \frac{5}{8} + P(ABC)$ 。由于 $P(ABC) \leq P(AB)$ ，而 $P(AB) = 0$ ，所以

$$P(ABC) = 0, \text{ 于是 } P(A \cup B \cup C) = \frac{5}{8}.$$

$$A, B, C \text{ 都不发生的概率是 } P(\overline{ABC}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

10.【参考答案】

证明:若 $f(a) = a$ 或 $f(b) = b$, 只需令 $x_0 = a$ 或 b 即可, 下面假设 $f(a) \neq a, f(b) \neq b$.

令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 由于 $f([a, b]) \subseteq [a, b]$, 且 $f(a) \neq a, f(b) \neq b$, 所以 $F(a) = f(a) - a > 0, F(b) = f(b) - b < 0$, 于是由零点存在定理可知, 存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $F(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = x_0$.

11.【参考答案】

$$\text{线性方程组 } \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases} \text{ 对应的增广矩阵为 } \bar{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}, \text{ 对 } \bar{A} \text{ 作初等行变换化成阶梯形}$$

矩阵:

$$\bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (2+a)(1-a) & 1-a \end{bmatrix}.$$

当 $(2+a)(1-a) = 0, 1-a \neq 0$, 即 $a = -2$ 时, 线性方程组对应的系数矩阵的秩 $r(A) \neq r(\bar{A})$, 此时线性方程组无解;

当 $(2+a)(1-a) = 0, 1-a = 0$, 即 $a = 1$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 此时线性方程组有无穷多解;

当 $(2+a)(1-a) \neq 0$, 即 $a \neq 1$, 且 $a \neq -2$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 此时线性方程组有唯一解.

12.【参考答案】

数学学习评价的要点主要有以下几个方面:

- (1) 评价的主要目的是全面了解学生数学学习的过程和结果, 激励学生学习和改进教师教学;
- (2) 评价应以课程目标和内容标准为依据, 体现数学课程的基本理念;
- (3) 全面评价学生在知识技能、数学思考、问题解决和情感态度等方面的表现;
- (4) 评价不仅要关注学生的学习结果, 更要关注学生在学习过程中的发展和变化;
- (5) 应采用多样化的评价方式, 恰当呈现并合理利用评价结果, 发挥评价的激励作用, 保护学生的自尊心和自信心;
- (6) 充分利用评价得到的信息, 了解学生数学学习达到的水平和存在的问题, 从而帮助教师自身进行总结与反思, 调整和改进教学内容和教学过程.

13.【参考答案】

有效的教学活动是学生学与教师教的统一, 我认为有效的教学活动应该做到以下几点:

- ① 在教学过程中, 教师要以学生为主体, 充分发挥学生的主体作用;
- ② 数学教学活动, 特别是课堂教学应激发学生兴趣, 调动学生积极性, 引发学生数学思考, 鼓励学生的创造性思维;
- ③ 在数学教学活动中, 学生的学习应当是一个生动活泼、主动的和富有个性的过程, 学生应当有足够的时间和空间经历观察、实验、猜测、计算、推理、验证等活动过程;
- ④ 教学活动中, 教师应该以学生的认知发展水平和已有的经验为基础, 面向全体学生, 注重启发式和因材施教.

三、解答题

14.【参考答案】

由于矩阵 A 的特征多项式为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$, 所以二阶矩阵 A 具有两个不相等的特征值 -2 和 1 , 从而 A 可对角化。

求出线性方程组 $(E - A)x = 0$ 的一个基础解系 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, 即矩阵 A 的属于特征值 1 的一个特征向量;

求出线性方程组 $(-2E - A)x = 0$ 的一个基础解系 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 即矩阵 A 的属于特征值 -2 的一个特征向量。

令 $T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

学生是数学学习的主体,在积极参与学习活动的过程中不断得到发展,学生获得知识必须建立在自己思考的基础上,只有亲身参与教师精心设计的教学活动,才能在数学思考、问题解决和情感态度方面得到发展。

教师应成为学生学习活动的组织者、引导者、合作者,为学生的发展提供良好的环境和条件。教师不仅要根据学生的实际情况和教学目标设计出好的教学方案,还要采用适当的教学方式,营造师生互动、生生互动、生动活泼的课堂氛围。教师要引导学生通过实践、思考、探索、交流获得知识、形成技能以及发展思维等。在教学的过程中,教师应以平等、尊重的态度鼓励学生积极参与教学活动,启发学生共同探索。

在教学过程中,既要重视教师教,更要重视学生学,好的教学活动是学生的主体地位和教师的主导作用的和谐统一。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 该生在第一步就出现错误了。出现错误的原因是对二元一次方程组的加减消元法以及代数式的合并同类项知识点掌握不扎实,由 ① - ② 应得到 $3y = 3$ 。

(2) 正确的解答过程如下:

解:① - ② 得

$$2x + y - (2x - 2y) = 3$$

即 $3y = 3, y = 1$,

把 $y = 1$ 代入 ① 中得

$$2x + 1 = 5, \text{ 则 } x = 2.$$

所以此方程的解为 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

(3) 材料中学生出现错误是由于对二元一次方程组的加减消元法以及合并同类项等知识点掌握不扎实,粗心大意导致的。为防范学生出现这种错误,可采用以下方法:

① 教师在教学过程中可以设置相应的例题,师生一起观察并解答题目,通过对方程组中的未知数的观察和分析,明确解二元一次方程组的主要思路是“消元”,培养学生的观察能力,注重学生在教学活动中的主体地位;

② 通过运用加减消元法、代入消元法解二元一次方程组的训练,选用合理、简捷的方法解方程组,培养学生的运算能力;

③ 得出最终的计算结果后,将结果代入到二元一次方程中,检验结果是否正确,将 x, y 的值代入到方程组中,如果等式两边相等,则说明计算结果正确;如果等式两边不相等,则说明结果错误,需要重新计算。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 课题引入

活动：教师带领学生回顾“平方根”的概念，即一般地，如果一个数的平方等于 a ，那么这个数叫作 a 的平方根。

提问：结合“平方根”的概念，思考什么叫作算数平方根呢？

学生思考后，教师讲授：形如 $\sqrt{a}$ 的代数式叫作二次根式，其中 a 叫作被开方数，“ $\sqrt{\quad}$ ”称为二次根号。当 $a \geq 0$ 时， $\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根。（教师板书）

【设计意图】通过复习旧知进一步发展新知，贯彻巩固与发展的原则，帮助学生建立新旧知识之间的联系，同时培养学生独立思考的能力。

(2) 教学环节

1. 二次根式的初步运用

教师课件出示如下问题，供学生思考、讨论。

课件问题：a. 若正方形的面积是 S ，则正方形的边长为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

b. 已知长方体的长为 3，宽和高相等，若长方体的体积为 V ，则长方体的宽为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

订正答案：因为正方形的面积等于边长的平方，所以正方形的边长为 $\sqrt{S}$ ；因为长方体的体积 = 长 $\times$ 宽 $\times$ 高，宽和高相等，所以长方体的宽用根式表示为 $\sqrt{\frac{V}{3}}$ 。

2. 二次根式的意义和性质

活动一：教师课件出示例 1 供学生思考讨论，教师巡视指导。

例 1：当 x 是怎样的实数时，二次根式 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义？

订正答案：结合二次根式的概念可以知道，要使 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义，则 $x-2 \geq 0$ ，所以可以求得 $x \geq 2$ 。（教师板书）

提出问题 1：使 $\sqrt{x^2}$ 和 $\sqrt{x^3}$ 有意义的条件是什么呢？（预留时间供学生思考讨论）

订正答案：因为 $x^2 \geq 0$ 恒成立，所以 x 取任意实数， $\sqrt{x^2}$ 都有意义；当 $x^3 \geq 0$ ，即 $x \geq 0$ 时， $\sqrt{x^3}$ 在实数范围内有意义。

提出问题 2：你能分别比较 a 与 0 以及 $\sqrt{a}$ 与 0 的大小吗？

教师引导 1： $\sqrt{a}$ 是一个根式，你能根据二次根式的概念得出什么？

教师引导 2：对 a 有什么要求？

得出结论：当 $a \geq 0$ 时， $\sqrt{a} \geq 0$ 。

【设计意图】根据二次根式的概念进一步设问，使学生自主探究二次根式在何种情况下有意义，之后通过问题引导学生独立得出 $\sqrt{a} \geq 0$ 的结论，强化学生对二次根式本身为非负数的理解；培养学生对所学知识的迁移能力和应用意识；提高学生分类讨论和归纳概括的能力。

活动二：教师课件出示例 2，请学生板演 ①②，教师结合学生答案做适当评价。

例 2：根据算术平方根的意义，回答下列问题。

$$\textcircled{1} (\sqrt{4})^2 = \underline{\hspace{2cm}}; \sqrt{4^2} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\textcircled{2} (\sqrt{0})^2 = \underline{\hspace{2cm}}; \sqrt{0^2} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\textcircled{3} (-\sqrt{2})^2 = \underline{\hspace{2cm}}; \sqrt{(2)^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

教师讲授：2 的平方等于 4，所以 $\sqrt{4} = 2$ ， $(\sqrt{4})^2$ 就是 2^2 ，就等于 4，4 的平方为 4^2 ， $\sqrt{4^2} = 4$ ； $(\sqrt{0})^2$ 和 $\sqrt{0^2}$ 都为 0。

教师小结：因此，由以上两组题我们可以知道， $(\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0)$ ， $\sqrt{a^2} = a(a \geq 0)$ 。（教师板书）

活动三：教师让学生自主思考例2中的③，并做如下引导。

教师引导1： $(-\sqrt{2})^2$ 用乘法表示是什么？

教师引导2：根号和根号相乘可以抵消，我们还知道负负得什么？所以结果是什么？

和学生共同得出结论： $(-\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}) = 2$ ； $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ 。

【设计意图】运用几组根式的计算，让学生自主探索新知内容，可以培养学生举一反三、自主学习的能力和探索精神；在此基础上教师巧妙引入新知，可以加深学生对于新知内容的理解；教师通过两个练习题引入负数的情况，逐渐引导学生说出答案，一方面可以拓展延伸知识内容为新课埋下伏笔，另一方面可以进一步帮助学生巩固新知内容。

3. 新课总结

教师带领学生回顾新知内容，并做如下总结：

形如 $\sqrt{a}$ 的代数式叫作二次根式，其中 a 叫作被开方数，“ $\sqrt{\quad}$ ”称为二次根号；

当 $a \geq 0$ 时， $\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根； $(\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0)$ ， $\sqrt{a^2} = a(a \geq 0)$ 。

教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)

标准预测试卷(二) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】C。解析：罗尔定理的条件是：函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内连续，在区间 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$ 。A 项不满足 $f(1) = f(-1)$ ；B, D 两项不满足在区间 $[-1, 1]$ 内连续；C 项满足条件。故本题选 C。

2. 【答案】B。解析：因为 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 6\lambda x_2 x_3$ 是正定二次型，所以该二次型对应的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3\lambda \\ 0 & 3\lambda & 3 \end{bmatrix}$ 的各阶顺序主子式的行列式值都大于零，即有 $|1| > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3\lambda \\ 0 & 3\lambda & 3 \end{vmatrix} = 6 - 9\lambda^2 > 0$ ，解得 $-\frac{\sqrt{6}}{3} < \lambda < \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。故本题选 B。

3. 【答案】A。解析：根据平面 π 的方程可知，向量 $(1, 2, -1)$ 是平面 π 的一个法向量，于是过点 A 且垂直于平面 π 的直线的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 + t, \\ y = -3 + 2t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$ 将直线的参数方程代入平面方程得， $(4+t) + 2(-3+2t) - (1-t) - 3 = 0$ ，解得 $t = 1$ 。因此，点 $A(4, -3, 1)$ 在平面 π 上的投影为 $(4+1, -3+2, 1-1) = (5, -1, 0)$ 。故本题选 A。

4. 【答案】D。解析：已知 A, B 互不相容，所以 $P(AB) = 0$ 。A 项， $P(\overline{AB}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$ ，因为 $P(A \cup B)$ 不一定为 1，所以 A 项错误；B 项，当 $P(A), P(B)$ 不为 0 时，该式不成立，B 项错误；C 项，只有当 A, B 互为对立事件时等式成立，C 项错误；D 项， $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(AB) = 1$ ，D 项正确。故本题选 D。

5. 【答案】A。解析：因为 $f(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)$ ，所以矩阵 A 的特征值为 1, 2, -3，于是 $|A| = 1 \times 2 \times (-3) = -6$ 。故本题选 A。

6. 【答案】A。解析：选项中的级数都是正项级数。对于 A 项，因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{n + \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n}{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n^n}} = 1 \neq 0$ ，所以 A 项级数一定发散；对于 B 项，因为当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\frac{1}{n^2 - n + 1} \sim \frac{1}{n^2}$ ，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 B 项级数收敛；对于 C 项，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3$ ，即 C 项级数有界，所以 C 项级数收敛；对于 D 项，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ ，即 D 项级数有界，所以 D 项级数收敛。故本题选 A。

7. 【答案】A。解析：对于任意两个有理数 a, b (设 $a < b$)，总能找到介于 a, b 之间的有理数，如 $\frac{a+b}{2}$ ，所以有理数系具有稠密性，B 项说法正确；C 项是有理数的定义，说法正确；任意两个有理数的商 (除数不为 0) 仍然是有理数，即有理数的除法 (除数不为 0) 具有封闭性，D 项说法正确。A 项说法错误，因为在有理数系内存在不收敛的柯西数列，例如取 $\sqrt{2}$ 近似到小数点后第 n 位的近似数组成一个数列，1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ...，则这个数列是柯西数列，且每一项都是有理数，但其在有理数系内不存在极限 (在实数系内存在极限 $\sqrt{2}$)。

8. 【答案】D。解析：《义务教育数学课程标准(2011 年版)》从数学思考方面具体阐述课程总目标时指出，“建立数感、符号意识和空间观念，初步形成几何直观和运算能力，发展形象思维与抽象思维”。

二、简答题

9.【参考答案】

(1) 从容量为 N 的总体中抽取容量为 n 的样本,将总体分成均衡的若干部分,然后按照预先规定的规则,从每一部分抽取一个个体,得到所需要的样本的抽样方法叫作系统抽样。根据本题描述可知,此研究性学习小组在采样中,用到的是系统抽样方法。

由频率分布直方图知, $[85, 90)$ 速段内的车速频率最高,故这 40 辆小型汽车车速的众数的估计值为 87.5。将这 40 辆小型汽车的车速频数按照车速从小到大的顺序排列,依次为 2, 4, 8, 12, 10, 4。由中位数的定义知,40 个车速数据的中位数为第 20 个和第 21 个车速数据和的一半。因为从小到大排列的第 20 个和第 21 个车速数据均为 $[85, 90)$ 速段内,所以这 40 辆小型汽车车速的中位数的估计值为 87.5。

(2) 车速在 $[80, 90)$ 的车辆共 $(0.2 + 0.3) \times 40 = 20$ (辆),

车速在 $[80, 85)$, $[85, 90)$ 的车辆分别有 8 辆和 12 辆,

则从车速在 $[80, 90)$ 的车辆中任意抽取 3 辆车,

车速在 $[80, 85)$, $[85, 90)$ 内都有车辆的概率为 $P = \frac{C_8^2 C_{12}^1}{C_{20}^3} + \frac{C_8^1 C_{12}^2}{C_{20}^3} = \frac{864}{1140} = \frac{72}{95}$ 。

(3) 车速在 $[70, 80)$ 的车辆共 6 辆,车速在 $[70, 75)$, $[75, 80)$ 的车辆分别有 2 辆和 4 辆。

记从车速在 $[70, 80)$ 的车辆中任意抽取 3 辆,车速在 $[75, 80)$ 的车辆数为 ξ , 则 ξ 的可能取值为 1, 2, 3, 则有

$$P(\xi = 1) = \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{5},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{3}{5},$$

$$P(\xi = 3) = \frac{C_2^0 C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5},$$

进而 $E(\xi) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2$ 。

10.【参考答案】

证明:因为 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数,所以 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 即 $m \leq$

$f(x) \leq M$, 于是 $m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$, 整理得 $m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$ 。由连续函数

的介值定理可知,存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$, 即满足 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ 。

11.【参考答案】

由于 a 是 $P(x) = 0$ 的 r 重根,所以存在多项式 $g(x)$ 使得, $P(x) = (x-a)^r g(x)$, 这里 $g(x)$ 不能被 $x-a$ 整除,于是 $P'(x) = r(x-a)^{r-1} g(x) + (x-a)^r g'(x) = (x-a)^{r-1} [rg(x) + (x-a)g'(x)]$ 。由于 $g(x)$ 不能整除 $x-a$, 所以 $g(a) \neq 0$, 于是 $[rg(x) + (x-a)g'(x)]|_{x=a} = rg(a) \neq 0$, 从而 $[rg(x) + (x-a)g'(x)]$ 不能被 $x-a$ 整除。因此, a 是 $P'(x) = 0$ 的 $r-1$ 重根。

12.【参考答案】

一元一次方程在中学数学课程中的作用:

① 一元一次方程是初中数学的重要内容,也是后续学习二元一次方程和一元二次方程的基础;

② 一元一次方程的教学是以生活实际为背景的教学,可以让学生真正经历模型化的过程,从而初步培养学生的模型思想;

③ 方程、不等式、函数等是对生活实际问题做符号化的表述和研究,而一元一次方程的学习是培养学生符号化思想的基础,为不等式、函数的学习做铺垫;

④通过一元一次方程的教学,可以提升学生分析问题、解决问题的能力,使其体会研究数学的规律。

13.【参考答案】

培养推理能力的实质是培养逻辑思维能力。在教学实践中,教师要创设接近学生现实生活的问题情境,鼓励学生以独立思考、合作学习等不同方式对问题进行多角度探究,采取积极有效的策略引导学生进行自主发现。对于演绎推理的教学,要充分体现从说理到严格推理的过渡,把握好循序渐进的教学原则,让学生经历发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的全过程并内化为推理能力。

三、解答题

14.【参考答案】

(1) 直线与 x 轴相交等价于存在 x 轴上唯一一点 $(x_0, 0, 0)$ 满足直线方程, 等价于方程组
$$\begin{cases} A_1x + D_1 = 0, \\ A_2x + D_2 = 0 \end{cases} \text{ 有}$$
 唯一解, 等价于 A_1, A_2 不全为 0, 且 $\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} = A_1D_2 - A_2D_1 \neq 0$ 。

(2) 直线与 x 轴重合等价于 x 轴上任意一点 $(x, 0, 0)$ 都满足直线方程, 等价于方程组
$$\begin{cases} A_1x + D_1 = 0, \\ A_2x + D_2 = 0 \end{cases} \text{ 有无穷多解, 等价于 } A_1 = A_2 = D_1 = D_2 = 0$$
。

(3) 直线与 x 轴平行等价于存在不全为 0 的 $\Delta D_1, \Delta D_2$ 使得直线
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \Delta D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 + \Delta D_2 = 0 \end{cases} \text{ 与 } x \text{ 轴}$$
 重合(这里直线方程中的两个平面分别与原直线方程中的两个平面重合或平行), 由(2)知这等价于 $A_1 = A_2 = D_1 + \Delta D_1 = D_2 + \Delta D_2 = 0$, 再结合 $\Delta D_1, \Delta D_2$ 不全为 0 得, $A_1 = A_2 = 0$, 且 D_1, D_2 不全为 0。

四、论述题

15.【参考答案】

数学教育评价是全面收集和处理数学课程教育学的设计、实施过程中的信息,从而做出价值判断、改进教育决策的过程。

数学教育评价的作用主要体现在以下几个方面:

(1) 管理作用。数学教育评价以国家数学课程标准为基准,评价的目的是实现国家数学课程标准的各项要求,达到教育目标。只有科学的数学教育评价,才能有效地对数学教育过程进行科学的管理。

(2) 导向作用。不同的教育价值观有不同的评价标准,不同的评价标准,对数学实践起着不同的导向作用。被评价者把教育评价所依据的价值标准作为自己的价值标准,把教育评价所依据的目标作为自己努力达到的目标。

(3) 调控作用。所谓调控作用是指调节与控制教学。在数学教育评价的过程中,要收集大量的教育信息,并通过信息反馈,调节教学,控制教学,使之尽快地达到目标要求,这样可以成功地获得教育或教学的理想效果。

(4) 激发作用。通过数学教育评价,可以帮助教师及时获得大量的信息,使其认识到自己的成就和不足,进一步发现成功与失败的原因,了解个人自身教与学存在的差距,从而达到激励先进,鞭策后进的目的。通过反馈信息的调节与控制可以激发学生学习数学的积极性,培养学生的数学意识,使学生热爱数学,获得最佳的学习效果。

(5) 诊断作用。数学教育评价的诊断功能是由教育评价自身决定的,通过教育上的诊断,可以为改进和提高下一阶段的学习提供依据,及时了解存在问题的症结和弊端,以便有针对性地改变策略和方法,促进学生的发展。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 教师甲在教学过程中,落实了课标中的要求。教师甲组织学生进行小组讨论,这体现了教师是学生活

动的组织者,在最初的题目设置上,教师甲提出铺垫性问题,引导学生去思考,对问题不断地分析,引领学生突破惯性思维,注重学生的思考和动脑能力,加深对知识点的理解,巩固所学知识,在这点上体现了教师甲的引导者角色,但教师甲的提问过程过于详细,从而限制了学生的发散思维,除此之外,教师甲也没有对学生进行明确的分组并参与到其讨论中,所以教师甲在身为组织者和合作者方面存在不足。

教师乙在教学过程中缺乏对授课过程中实际情况的应急处理,而且没有引导学生对题目进一步思考,把可能结果自行罗列,不利于发展学生的创新思维,限制了学生的思考,所以教师乙在身为组织者和引导者方面存在不足,但是当学生进行小组讨论时,教师乙能够进行巡视指导并参与到学生的讨论之中,在学生思路受阻时给以一定的引导,体现了教师是学生活动的组织者和合作者。

(2) 组织数学探究活动,需要注意以下事项。

① 探究活动内容的选择要合理。要使探究活动更有效,需要发现和提出有意义的数学问题,同时探究内容要有激发性,也就是说,探究的问题能激发学生的探究欲望,问题的设置要在学生的“最近发展区”。

② 探究活动的指导要合理。在探究活动中,教师要扮演好组织者、引导者、合作者的角色。首先要给学生创设探究的情境,其次要保证学生有探究的时间,再次探究活动并不是让学生毫无节制的谈论,而是精心编制的教学活动,所以教师不能孤立于学生之外,要及时进行指导,并对学生的探究结果做出合理的评价。

③ 在探究活动中,正确处理教师引导和学生探究的关系。学生作为探究活动的主体,需要通过自己的探究去发现新知识。教师作为引导者要发挥引导的作用,既要在学生脱离主题的时候,适时地引导方向,又不能过分地牵制学生的思想,造成“伪探究”的现象,还要注重学生的参与程度,让每个学生体验参与活动的乐趣。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 勾股定理:直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方。

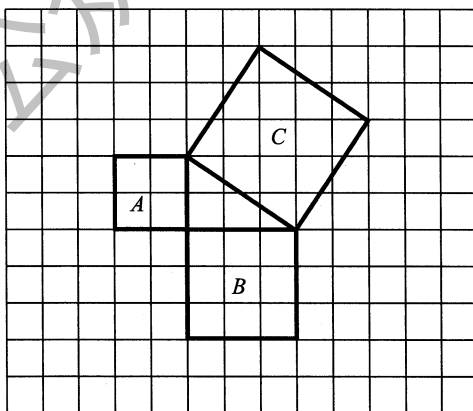
(2) 教学过程

1. 复习旧知

教师带领学生复习直角三角形的相关概念。

2. 情境导入

教师设置问题情境:如图(多媒体展示),设每个小方格的面积均为1,请分别算出正方形A,B,C的面积,你能得出什么结论?



活动:教师让学生在草稿纸上绘制如多媒体展示的网格图,按照上述要求算出正方形A,B,C的面积,观察其中的关系,给学生进行分组,预留时间供其合作探究,教师巡视指导。

【设计意图】新课之前复习旧知,帮助学生巩固旧知,在旧知的基础上发展新知,贯彻巩固与发展相结合的原则;教师设置情境,让学生对新知进行自主探究,充分体现课标的要求;在教学过程中以学生为主体,同时也培养了学生的发散思维和创新能力;小组交流,培养了学生的合作交流意识。

3. 明确定理

学生根据计算和讨论,得出猜想,教师进行适当点评,并板书定理:如果直角三角形的两条直角边长分别为 a, b , 斜边长为 c , 那么 $a^2 + b^2 = c^2$ 。

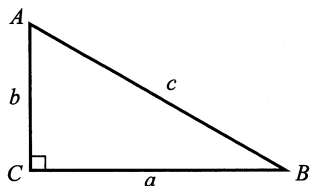
教师讲授定理:经过活动探究可知,直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方,我们称这一结论为勾股定理。

【设计意图】教师结合导入的问题,介绍定理的概念,并进一步明确定理的内容,对定理进行详细的描述,通过几何直观的方式使得学生能够很好地理解定理,并对定理内容形成深刻记忆。

4. 定理证明

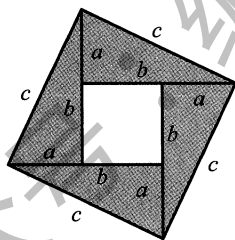
教师引导学生分析“已知”和“求证”:已知为“在一个直角三角形 ABC 中,三个角所对应的边分别为两条直角边 a, b 和斜边 c ”,要证结论为“ $a^2 + b^2 = c^2$ ”。

教师引导学生将定理内容符号化,并抽象成数学问题:如图,在三角形 ABC 中, $AC \perp BC$, 角 A, B, C , 所对应的边为 a, b, c , 求证: $a^2 + b^2 = c^2$ 。



活动:教师预留时间让学生思考,并小组交流如何证明勾股定理,教师巡视,并做如下启发。

教师:证明勾股定理的方法有很多种,下面我们试着用古人赵爽的证法,利用“赵爽弦图”证明。观察下面的赵爽弦图,完成填空。



图中一个三角形的面积为_____;

小正方形的面积为_____;

大正方形的面积为_____;

大正方形的面积还可以表示为_____。

教师让学生自主完成填空,之后核对答案,引导学生根据已有的信息尝试证明定理。

教师巡视指导,之后讲解该定理的证明思路,并板书证明过程:

以 a, b 为直角边, c 为斜边的 4 个全等直角三角形,每个三角形的面积都为 $\frac{1}{2}ab$, 小正方形的面积为 $(b - a)^2$, 大正方形的面积为 c^2 , 观察赵爽弦图可以看出,四个全等的直角三角形的面积 + 小正方形的面积 = 大正方形的面积, 即 $\frac{1}{2}ab \times 4 + (b - a)^2 = c^2$, 化简左边得, $a^2 + b^2 = c^2$, 定理得证。

【设计意图】教师引导学生将定理内容与学习过的三角形、正方形面积联系起来,将定理内容符号化为数学问题;教师启发学生思考,独立自主证明命题,提高分析问题和解决问题的能力;教师在板书证明的过程中,帮助学生规范数学语言和证明思路。

(3) 借助“勾股定理”,提高学生对几何图形的认识和积累主要有以下几点:

① 结合生活中的直观图形,将实际生活中的经验转化为数学活动经验,培养学生动手操作的能力,例如,

在“勾股定理”中,教师可以拿出三角板教具让学生用直尺进行测量,通过独立自主地思考和探究,让学生对这个定理的理解更加深刻。

② 结合数学问题引导学生思考,观察,证明推理,培养学生的数学思维和几何直观。例如,在“勾股定理”的证明中,将定理内容抽象成数学问题,引导学生结合全等三角形的旧知来证明。

③ 丰富教学探究活动,通过实践帮助学生建立对几何图形的直观认识。例如,在“勾股定理”教学时,教师设计探究活动,准备三角板、直尺等学具,学生可以进行测量感知勾股定理蕴含的奥秘,进而直观地发现结论。

公众号·编途指南

教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学) 标准预测试卷(三) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】A。解析：已知 $a \cdot b = 0$, $a \times c = 0$, 所以 b 与 a 垂直, c 与 a 共线, 又由于 a 是非零向量, 所以 b 与 c 垂直, 于是 $b \cdot c = 0$ 。故本题选 A。

2. 【答案】C。解析：题中非齐次线性方程组对应的增广矩阵为 $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda & -4 & 2 \end{bmatrix}$, 对 $\bar{A}$ 作初等行

变换化成阶梯形矩阵得, $\bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \lambda \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2\lambda - 4 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$ 。显然, 若方程组有无穷多解, 则有 $2\lambda - 4 = 2 - \lambda =$

0, 解得 $\lambda = 2$ 。故本题选 C。

3. 【答案】D。解析：已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $x \ln x$, 则 $f(x) = (x \ln x)' = \ln x + 1$, 从而 $f'(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}$ 。故本题选 D。

4. 【答案】C。解析：根据规范性, $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = Ce = 1$, 所以 $C = e^{-1}$ 。故本题选 C。

5. 【答案】D。解析：由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + b_n) - b_n]$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛, 所以当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。故本题选 D。

6. 【答案】C。解析：因为 $(\xi_3, 2\xi_2, \xi_1) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 所以基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 到基 $\xi_3, 2\xi_2, \xi_1$ 的过渡

矩阵为 $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 从而 $\mathcal{A}$ 在基 $\xi_3, 2\xi_2, \xi_1$ 下的矩阵为 $P^{-1}AP =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}。故本题选 C。$$

7. 【答案】C。解析：《义务教育数学课程标准(2011年版)》指出, 情感态度目标包括: 积极参与数学活动, 对数学有好奇心和求知欲; 在数学学习过程中, 体验获得成功的乐趣, 锻炼克服困难的意志, 建立自信心; 体会数学的特点, 了解数学的价值; 养成认真勤奋、独立思考、合作交流、反思质疑等学习习惯; 形成坚持真理、修正错误、严谨求实的科学态度。故本题选 C。

8. 【答案】A。解析：《义务教育数学课程标准(2011年版)》指出, 创新意识的培养是现代数学教育的基本任务, 应体现在数学教与学的过程之中, 学生自己发现和提出问题是创新的基础; 独立思考、学会思考是创新的核心; 归纳概括得到猜想和规律, 并加以验证, 是创新的重要方法。故本题选 A。

二、简答题

9.【参考答案】

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x d e^{-\lambda x} = - \left[x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

10.【参考答案】

记点 (x, y) 经矩阵 A 变换后的坐标为 (x', y') , 则 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, 即 $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x - y \end{cases}$, 将 (x', y') 代入直线 l_1 的方程, 整理得 $\left(\frac{2}{b} - 1\right)y = -\left(1 + \frac{1}{b}\right)x + \frac{1}{b}$. 由于 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, 所以 $\left(\frac{2}{b} - 1\right)y = -\left(1 + \frac{1}{b}\right)x + \frac{1}{b}$ 就是直线 l 的方程. 显然 $\frac{2}{b} - 1$ 不能等于 0, 所以直线方程可化为 $y = -\left(\frac{b+1}{2-b}\right)x + \frac{1}{2-b}$, 从而 $\begin{cases} \frac{b+1}{2-b} = a, \\ \frac{1}{2-b} = 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$

11.【参考答案】

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(c) > 0, f(a) = f(b) = 0$, 所以由拉格朗日中值定理得, $\exists \xi_1 \in (a, c)$, 有 $f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(c)}{c - a} > 0$; $\exists \xi_2 \in (c, b)$, 有 $f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = -\frac{f(c)}{b - c} < 0$, 再使用拉格朗日中值定理得, $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$, 有 $f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0$.

12.【参考答案】

平面直角坐标系是以数轴为基础的, 由两条相互垂直、原点重合的数轴构成, 其在中学数学课程中的作用主要有以下几点:

① 在“平面直角坐标系”一课的教学中一般通过“数轴”类比学习, 运用数轴上的点的表示方法寻找平面直角坐标系中点的坐标, 体现平面直角坐标系中点与有序数对的关系, 这一过程可以培养学生类比、转化、数形结合等数学思想, 从而达到新课标中对中学生的数学思维及“四能”的要求;

② 平面直角坐标系是数与形之间的桥梁, 体现了代数问题与几何问题的相互转化, 是函数图像相关知识的基础, 学生学习本课可以为后续内容的学习做铺垫;

③ 用坐标表示地理位置体现了坐标系在实际生活中的应用, 用平面直角坐标系表示区域内地点的位置, 利用了有序数对与点的对应关系, 可以培养学生一一对应的数学思想。

13.【参考答案】

学习评价有以下几点作用:

- ① 及时反馈学习信息, 诊断学生在学习过程中遇到的问题;
- ② 帮助学生达到自己的期望值, 激发学生学习的积极性;
- ③ 教师根据学生的学习状况, 对教学适时地进行调控和改进, 以取得更好的教学效果。

设计和实施有效的数学学习评价, 恰当地运用评价的内容和结果, 对激发学生学习数学的兴趣, 提高学生学习的信心, 促进学生的发展起着重要的作用。同时, 评价也是教师了解学生学习状况、诊断学习效果和改进教学的重要途径。

三、解答题

14.【参考答案】

$f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}} = \lim_{t \rightarrow x} \left(1 + \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \right)^{\frac{\sin x}{\sin t - \sin x} \cdot \frac{x}{\sin x}} = e^{\frac{x}{\sin x}}$ 。由于 $e^{\frac{x}{\sin x}}$ 是初等函数,且仅当 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时无意义,所以函数 $f(x)$ 的间断点为 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 。

当 $k = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow k\pi^+} e^{\frac{x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow k\pi^-} e^{\frac{x}{\sin x}} = e$, 此时在 $x = k\pi$ 处的左、右极限存在且相等;

当 $k = -1, -3, -5, \dots$; 或 $k = 2, 4, 6, \dots$ 时, $\lim_{x \rightarrow k\pi^+} e^{\frac{x}{\sin x}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow k\pi^-} e^{\frac{x}{\sin x}} = 0$, 此时在 $x = k\pi$ 处的右极限不存在;

当 $k = 1, 3, 5, \dots$; 或 $k = -2, -4, -6, \dots$ 时, $\lim_{x \rightarrow k\pi^+} e^{\frac{x}{\sin x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow k\pi^-} e^{\frac{x}{\sin x}} = +\infty$, 此时在 $x = k\pi$ 处的左极限不存在。因此, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, $x = k\pi (k \neq 0, k \in \mathbf{Z})$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点。

四、论述题

15.【参考答案】

常用的导入环节的类型主要有以下几种:

(1) 温故导入

温故导入主要是利用新旧知识间的逻辑联系,找出新旧知识联结的交点,由旧知识的复习迁移到新知识的学习上来。此种方法常用于数学概念和命题教学。

(2) 实例导入

实例导入是选取与所授内容有关的生活实例或学生已有的生活经验,通过对其分析、引申、演绎、归纳出从特殊到一般、从具体到抽象的规律来导入新课。当新授内容与学生有关生活经验既有联系又有区别时,通常适宜采用此种导入方法。例如,在对数概念的导入教学中,可以从研究学生身边的一些增长率问题为出发点。

(3) 情境导入

情境导入就是通过多媒体辅助教学手段,创设出能够激发学生的想象力或引发学生相应情感体验的情境,以激发学生的兴趣,诱发思维,使学生在欣赏或情绪渲染中就势转入新内容学习的一种导入方式。在数学中,几何图形相关概念、定理公理、数学应用题等教学情境可以采用此种导入方法。例如,在讲解平行四边形的相关定理时可以采用此种导入方法。

(4) 类比导入

类比导入就是当两个对象都有某些相同或类似属性,而且已经了解其中一个对象的某些性质时,推测另一个对象也有相同或类似性质的思维形式。例如,在学习分式时,可以通过分数类比学习。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) ① 第一题中 $\sqrt{16}$ 等于 4, 因此可以将题目理解为 4 的算术平方根是什么? 结果应为 2; ② 第二题中 $\sqrt{4}$ 等于 2, 因此可以将题目理解为 2 的平方根是什么? 结果应为 $\pm\sqrt{2}$ 。

该生出现错误的原因: 读题过程中对题目的审读不够严谨; 未能掌握和理解平方根的概念, 平方根与算术平方根概念混淆。

(2) 一般解法如下:

① 仔细审读题目, 一字一句读清楚读明白, 理清题意, 若遇到题目中含有根式, 一定要化到最简形式;

② 第一个题目中 $\sqrt{16} = 4$, 化简后是 4 的算术平方根是多少? $\sqrt{4} = 2$, 且算术平方根为正值, 不含负值, 故为 2。第二个题目中 $\sqrt{4} = 2$, 化简后是 2 的平方根是多少? 2 开根号为 $\sqrt{2}$, 因为平方根有正值也有负值, 故结果为 $\pm\sqrt{2}$ 。

(3) 初中阶段常用到的数学思想方法主要有：

① 化归思想

化归思想是在研究和解决某一数学问题时,采用某种手段将问题通过变换使之转化为简单问题,进而得以解决的一种思想方法。在根式的求解中可以应用到这种思想方法,将根式等值变换到最简形式,再对题目进行求解,比如 $\sqrt{256}$ 的算术平方根是多少? 将根式化到最简,即 16 的算术平方根是多少? 故结果为 4。

② 类比思想

类比推理在人们认识和改造客观世界的活动中具有重要意义,它能触类旁通,启发思考,不仅是解决日常生活中大量问题的基础,而且是进行科学研究和发明创造的有力工具。比如在二次根式的加减运算中,指出“合并同类二次根式与合并同类项”相类似,因此二次根式的加减可以对比整式的加减,例如: $\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{6} - \sqrt{3} + 2\sqrt{6} = (2 - 1)\sqrt{3} + (1 - 5 + 2)\sqrt{6} = \sqrt{3} - 2\sqrt{6}$ 。

③ 分类思想

分类思想主要是根据数学本质属性的相同点和不同点,将研究对象分为不同种类的一种数学思想。在根式的计算中,我们可以将其划为算术平方根和平方根两类,比如 $\sqrt{16}$ 的算术平方根是 2,平方根是 ± 2 。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 一元一次方程:设椅子数为 x ,则凳子数为 $16 - x$,则有 $4x + 3(16 - x) = 60$,解得 $x = 12$,所以有 12 个椅子,4 个凳子。

二元一次方程组:设椅子数为 x ,桌子数为 y ,则有 $\begin{cases} x + y = 16, \\ 4x + 3y = 60, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 12, \\ y = 4, \end{cases}$ 所以有 12 个椅子,4 个凳子。

(2) 教学目标

知识与技能目标:知道二元一次方程和二元一次方程组的概念,理解二元一次方程组解的概念,能够运用列表的方式找出二元一次方程组的解。

过程与方法目标:在解决生活中实际问题的过程中,渗透把实际问题抽象成数学模型的思想;通过小组合作寻找二元一次方程组解的过程,提升探究学习的意识。

情感态度与价值观目标:在探索学习的过程中,感受数学的开放性和创新性,发展学习数学的兴趣,树立学习数学的信心。

(3) 教学过程

提出问题:在一个房间里有四条腿的椅子和三条腿的凳子共 16 个,如果椅子腿数和凳子腿数加起来共有 60 个,有几个椅子和几个凳子?

预留时间给学生思考,并提示学生用学过的知识列出满足题意的式子。

教师巡视指导,之后引导学生列出方程,板书如下:

解:设椅子有 x 个,则相应的凳子有 $(16 - x)$ 个,

根据题意得: $4x + 3 \times (16 - x) = 60$

追问:这是我们学过的哪一种方程? 你还有不同的列式方法吗?

探究:用二元一次方程组解决实际问题。

提问:能不能设两个未知数来表示椅子数和凳子数? 尝试列出方程。

教师提示学生用未知数表示题中的数量关系,并板书解题思路:

解:设椅子有 x 个,凳子有 y 个,根据题意,椅子和凳子共有 16 个,所以可列式: $x + y = 16$,那么由椅子腿数和凳子腿数共有 60 个,可列式: $4x + 3y = 60$ 。

上边两个包含两个未知数的方程就是二元一次方程,要满足题意,则需使两个二元一次方程都成立,所以两个二元一次方程就组成了二元一次方程组: $\begin{cases} x + y = 16, \\ 4x + 3y = 60. \end{cases}$

探究：二元一次方程组的解

提问：满足上面的两个方程，且具有实际意义的 x, y 值有哪些？把它们填入表中。

x				
y				

学生小组合作探究，最后进行分组汇报。

教师对学生的汇报结果进行小结：根据题意， x, y 的取值必须是正整数，有 $x = 1, y = 15, x = 2, y = 14, \dots, x = 15, y = 1$ ，这 15 对 x, y 的取值，还需要满足 $4x + 3y = 60$ ，经试验，当 $x = 12, y = 4$ 时，满足题意，故是二元一次方程组的解。

公众号：编途指南

教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)

标准预测试卷(四) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】C。解析：计算 $f(x)$ 的一阶导数和二阶导数， $f'(x) = a\cos x + \sin 2x + 2x\cos 2x$ ， $f''(x) = -a\sin x + 4\cos 2x - 4x\sin 2x$ 。因为 $f(x)$ 在 $x_0 = \pi$ 处取得极值，所以 $f'(\pi) = -a + 2\pi = 0$ ，于是 $a = 2\pi$ ，从而 $f''(\pi) = -2\pi\sin\pi + 4\cos 2\pi - 4\pi\sin 2\pi = 4 > 0$ 。因此， $f(x)$ 在 $x_0 = \pi$ 处取得极小值。故本题选C。

2. 【答案】A。解析：对以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量组的矩阵A作初等行变换化成阶梯形矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 10 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。由此可知，\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 是 \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 的一个极大线性无关$$

组。故本题选A。

3. 【答案】D。解析：由题意可得， $\vec{AB} = (2, 2, 2)$ ， $\vec{AC} = (1, 2, 4)$ ，所以 $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (4, -6, 2)$ ，于是 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$ 。故本题选D。

4. 【答案】A。解析：令 $a_n = \frac{1}{2^n \cdot n}$ ，由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$ ，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} x^n$ 的收敛半径为2。当 $x = 2$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ （调和级数），此时级数发散；当 $x = -2$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ，此时由莱布尼茨交错级数判别法知，级数收敛。因此， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} x^n$ 的收敛域为 $[-2, 2)$ 。故本题选A。

5. 【答案】C。解析：已知 $X \sim B(n, p)$ ，所以 $E(X) = np = 1.6$ ， $D(X) = np(1-p) = 1.28$ ，两式联立解得， $n = 8, p = 0.2$ 。故本题选C。

6. 【答案】B。解析：若 β 可以由向量组线性表出，则线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 有解。对线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 的增广矩阵A作初等行变换化成阶梯形矩阵： $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & t \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & -5 \\ 0 & 5 & 7 & t-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & t+3 \end{bmatrix}，要使方程组有解，需令 $t+3=0$ ，即 $t=-3$ 。故本题选B。$$

7. 【答案】A。解析：《义务教育数学课程标准(2011年版)》指出，数学活动经验的积累是提高学生数学素养的重要标志。故本题选A。

8. 【答案】D。解析：《义务教育数学课程标准(2011年版)》在关于“感悟数学思想”的描述中指出，分类是一种重要的数学思想，在研究数学问题中，常常需要通过分类讨论解决问题，分类的过程就是对事物共性的抽象过程。

二、简答题

9. 【参考答案】

(方法一) 所求直线记为 l ，由题意可知，与平面 $3x - 4y + z - 8 = 0$ 平行的平面系方程为 $3x - 4y + z + k =$

0, 又直线 l 过点 $(1, 0, 4)$, 代入求得 $k = -7$, 即直线 l 在平面 $3x - 4y + z - 7 = 0$ 上。联立方程

$$\begin{cases} 3x - 4y + z - 7 = 0, \\ x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}, \end{cases}$$

可求得直线 $x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$ 与直线 l 的交点为 $(21, 25, 44)$, 因为直线 l 还经过点 $(1, 0, 4)$, 所以直线 l 的一个方向向量 $l = (4, 5, 8)$, 因此所求直线的方程为 $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z-4}{8}$ 。

(方法二) 设过点 $(1, 0, 4)$ 且与平面 $3x - 4y + z - 8 = 0$ 平行的平面为 π_1 , 所求直线 l 在 π_1 内, 根据平行平面的关系易得, π_1 的一般方程为 $3x - 4y + z - 7 = 0$ 。

直线 $x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$ 过点 $(-1, 3, 0)$, 且一个方向向量为 $s = (1, 1, 2)$, 又平面 π_1 的一个法向量为 $n = (3, -4, 1)$, 因为 $sn \neq 0$, 所以直线 $x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$ 与 π_1 相交, 所以直线 l 与直线 $x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$ 所确定的平面 π_2 与 π_1 相交, 相交直线即为 l 。

平面 π_2 过点 $(-1, 3, 0)$ 和点 $(1, 0, 4)$, 且与向量 $s = (1, 1, 2)$ 平行, 设 π_2 上任意一点的坐标为 (x, y, z) , 则向量 $u = (x + 1, y - 3, z)$ 和向量 $v = (2, -3, 4)$ 都平行于平面 π_2 , 即向量 s, u, v 共面, 即有 $(s, u, v) =$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2x - z + 2 = 0, \text{ 所以 } \pi_2 \text{ 的一般方程为 } 2x - z + 2 = 0.$$

因此, 所求直线 l 的一般方程为 $\begin{cases} 3x - 4y + z - 7 = 0, \\ 2x - z + 2 = 0. \end{cases}$

10. 【参考答案】

设 $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_1 + \alpha_3) = (k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0$ 。由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以 $\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0, \end{cases}$ 解方程组得, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。因此, $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 线性无关。

11. 【参考答案】

令 $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 同时 $F(a) = 0, F(b) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}$, $F'(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f'(x) \\ g(a) & g'(x) \end{vmatrix}$ 。因此, 由拉格朗日中值定理可知, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$, 即 $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b - a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$ 。

12. 【参考答案】

在数学教学中, 信息技术是学生学习和教师教学的重要辅助手段, 为师生交流、生生交流、人机交流搭建了平台, 为学习和教学提供了丰富的资源。教师合理地运用信息技术, 可以优化课堂教学, 转变教学与学习方式, 为学生理解概念创设背景, 为学生探索规律启发思路, 为学生解决问题提供直观, 引导学生自主获取资源。

教师合理地运用信息技术, 使信息技术与数学课程深度融合, 可以实现传统教学手段难以达到的效果。例如, 利用计算机展示函数图像、几何图形运动变化过程, 利用计算机探究算法、进行较大规模的计算, 从数据库中获得数据, 绘制合适的统计图表; 利用计算机的随机模拟结果, 帮助学生更好地理解随机事件以及随机事件发生的概率。因此, 积极开发和有效利用各种课程资源, 合理地应用现代信息技术, 注重信息技术与课程内容的整合, 能有效地改变教学方式, 提高课堂教学的效益。

13.【参考答案】

三角形角平分线的性质定理为：在角平分线上的任意一点到这个角的两边距离相等。

“探索”是过程目标行为动词，“证明”是结果目标行为动词。“探究证明三角形角平分线定理”这一目标的设置，要求学生不仅要记住该定理的内容，还要掌握该定理的推导过程，联系知识间的内在关系，体会其中的数学思想，为进一步学习提供必要的知识准备。

探索证明有助于学生认识数学内容之间的内在联系。首先该定理的证明要作辅助线，运用三角形全等的性质，能提高学生的推理能力。从几何直观出发，作出全等或相似的三角形，联系相关知识对定理进行证明，经过这一过程，可以增强学生综合运用合情推理和演绎推理来发现问题、解决问题的能力。

三、解答题

14.【参考答案】

证明：任取 $x_0 \in [a, b]$ ，由题意， $\exists x_1 \in [a, b]$ ，使得 $|f(x_1)| \leq \frac{1}{2} |f(x_0)|$ ；同理，对于 x_1 ， $\exists x_2 \in [a, b]$ ，使得 $|f(x_2)| \leq \frac{1}{2} |f(x_1)| \leq \frac{1}{2^2} |f(x_0)|$ 。以此类推，可以得到 $[a, b]$ 上的一个数列 $\{x_n\}$ ， $\{x_n\}$ 满足 $|f(x_n)| \leq \frac{1}{2^n} |f(x_0)|$ ，容易计算， $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ 。

由于数列 $\{x_n\}$ 有界，所以存在 $\{x_n\}$ 的一个收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$ 。记 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$ ，则根据函数连续性可得， $f(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

出现这种现象的原因主要有以下几点：①教师提出的问题太难，超出学生的能力范围；②教师提的问题表述不够准确、具体，学生不知如何回答；③教师用语不当，学生不愿回答；④学生需要教师预留自己探索、实践、思考的时间和机会，不急于回答；⑤个别学生想回答，但是看其他同学没有出声，也选择沉默。

这种现象是教师在课堂教学中经常会遇到的问题，想要避免这种问题的出现，教师应该：①在设计问题的时候就站在学生的角度，切实考虑到他们的认知程度；②提出的问题必须是准确、具体、不产生歧义的，教师要在充分掌握教材和学情后，花费大量的时间和精力去设计问题；③教师在提问时说话语气和用词要恰当，要帮助学生建立自信心，调动学生回答问题的积极性；④提问时要给学生预留时间思考，必要时可以给学生一些启发；⑤营造活跃的课堂气氛，使学生积极的参与到课堂活动中，体会学习的乐趣。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 本节课为新知探究课，针对的是初一年级的学生。对该教师的教学目标评析如下：

① 该教师拟定的教学目标主题明确，行为动词恰当；

② 符合当前学生的基本学情，但在提高推理论证与逻辑思维能力等方面没有具体说明通过什么方法，也没有进行适当的小组讨论和学生间的合作探究环节，有所欠缺；

③ 教学目标还包括情感态度和价值观目标，尤其是新知探究课，学生在刚接触新知时，可能会出现畏难的学习心理，一定要体现出学生正确积极的情感态度和价值观，而该教师所拟定的教学目标在这一点上没有呈现。

(2) 该教师的教学思路的不足之处主要有以下几点：

① 对平行线的性质没有设计探究、论证环节；

② 没有相对具体地阐述论证两条平行直线被第三条直线所截的同位角相等，内错角相等，同旁内角互补的特性；

③ 没有结合相关例题，供学生思考与巩固新知；

④ 师生互动很少，缺少小组讨论环节，不利于培养学生的合作意识和创新精神。

(3) 初中数学教学中培养学生的逻辑推理能力需要采用科学化的措施,为学生综合学习发展助力,具体要从以下几个方面加以培养。

① 问题情境促进学生思考。初中阶段数学课程教学的知识都相对比较简单,但是数学知识的抽象性特征比较鲜明,教师在课堂教学中为促进逻辑推理能力的提升,需要在实际教学中充分注重引发学生思考,通过问题情境的创设带动学生进入到情境中去思考数学问题,通过现象看本质,这对逻辑推理能力提升非常有利。

② 思维导图促进学生逻辑思维能力的发展。在数学教学中对学生逻辑推理能力进行培养,要充分注重方法的灵活应用,引导学生对数学知识主动探究,让学生的逻辑思维在数学知识的探究当中发挥积极作用。

③ 推理与猜想并重。培养学生的逻辑推理能力需要教师在实际数学教学中从多角度考虑分析,让学生在课堂学习中有更多的收获。推理能力的提升在很大程度上需要学生自主进行猜想,这是促进学生创造性思维发展比较关键的动力。实际教学中教师要积极鼓励学生能够大胆猜想,适度引导学生通过已学知识加以推理,推理的过程也是验证自己猜想的过程。

④ 强化学生逻辑思维语言的培养。注重对学生逻辑思维和语言的训练培养,让学生能够明确推理和证明所需要遵守的逻辑规律,按照严格逻辑规律以及正确化应用数学概念以及定理,为学生做好示范,让学生在潜移默化中得到提升。

总而言之,在初中数学教学中,教师要从不同的角度进行思考探究,从整体上提升学生学习的质量和能,只有在这一基础层面得到了强化,才能真正为学生的可持续发展打下坚实基础。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 平行四边形性质:

- ① 平行四边形的对边相等;
- ② 平行四边形的对角相等;
- ③ 平行四边形的对角线互相平分。

平行四边形的判定方法:

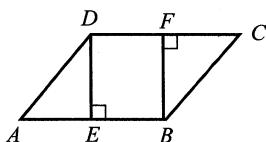
- ① 两组对边分别相等的四边形是平行四边形;
- ② 两组对角分别相等的四边形是平行四边形;
- ③ 对角线互相平分的四边形是平行四边形;
- ④ 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形。

(2) 教学片段

一、复习回顾

回顾平行四边形的性质有哪些? 又是怎么证明的?

如图,在 $\square ABCD$ 中, $DE \perp AB$, $BF \perp CD$, 垂足分别为 E, F , 求证: $AE = CF$ 。



要求:① 引导学生复习平行四边形的性质;② 学会用平行四边形的性质来证明一些命题;③ 学生做完题目之后,教师板书证明过程。

证明过程如下:

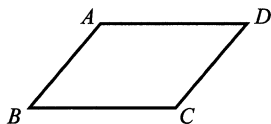
- $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
- $\therefore \angle A = \angle C, AD = CB,$
- 又 $\angle AED = \angle CFB = 90^\circ,$
- $\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF (AAS),$

$\therefore AE = CF$ 。

【设计意图】教师带领学生复习旧知,可以帮助学生进一步巩固旧知,包括平行四边形的性质和全等三角形的判定方法,同时有助于学生进一步了解平行四边形的性质,给出习题让学生用熟悉的方法自主解题,有助于教师对学生学习情况的把握,为后续教学做铺垫,学生解题后,教师板书,有助于规范学生的解题过程。

二、活动探究

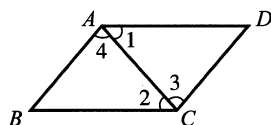
现有一个平行四边形 $ABCD$, 求证: $\angle B = \angle D$ 。



师生活动:教师出示问题,学生独立思考、回答。

教师追问:是不是可以用前面的方法来证明呢?

(预设) 学生证明过程:



证明:连接 AC ,

$\because AD \parallel BC, AB \parallel CD$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$,

又 AC 是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 的公共边,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$,

$\therefore \angle B = \angle D$ 。

教师继续提出如下问题,预留时间供学生探究。

追问 1:不添加辅助线,大家能否直接运用平行四边形定义,证明其对角相等?

追问 2:已知平行四边形一个内角的度数,大家能确定其他内角的度数吗?

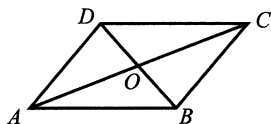
教师小结:

① 如果不添加辅助线的话,还可以利用以前学的平行线的性质,通过类比的方法,将这道题看做两条平行直线被第三条直线所截的情形,有内错角相等,同位角相等,同旁内角互补的特点, $\therefore \angle B + \angle A = 180^\circ$, $\angle A + \angle D = 180^\circ$, $\therefore \angle B = \angle D$ 。

② 已知平行四边形的一个内角的度数,则根据平行四边形的性质,对角相等,就确定两个角的度数了,再根据两条平行直线被第三条直线所截的同旁内角互补的特点,就能够确定四个角的度数了。

【设计意图】通过复习平行四边形性质的证明,巩固已经学过的知识,从而达到教学目标的要求,通过追问的方式,培养学生的发散思维。

(3) 教师提出问题:如图,在四边形 $ABCD$ 中, AC, BD 相交于点 O ,且 $OA = OC, OB = OD$,求证:四边形 $ABCD$ 是平行四边形。



追问 1:有的同学说可以通过全等三角形的方法来证明,大家可以试试,发现了什么?

(学生发现证明了 $\triangle AOD \cong \triangle COB$, $\triangle AOB \cong \triangle COD$ 之后,不知道接下来做什么。)追问 2:两个三角形全等的特点是什么呢?

学生根据教师提示得出:两个三角形全等的特点是对应边相等,对应角相等。

追问 3:大家还记得平行四边形的定义吗?

学生进行思考,有两组对边分别平行的四边形是平行四边形,即找出两组对边平行就可以证明其为平行四边形。

追问 4:以前有学过证明两条直线平行的方法,是怎么证明的呢?

学生根据教师引导,想到平行线的判定定理,同位角相等两直线平行,内错角相等两直线平行,同旁内角互补两直线平行。

追问 5:刚刚得到全等三角形的特点,能不能跟平行线的判定定理联系起来呢?

学生找到联系,得出证明。

追问 6:平行四边形判定定理的证明和前面学习的平行四边形性质的证明有什么联系呢?

学生思考,教师讲解:我们之前讲过证明平行四边形性质时,先用平行线性质的性质,再证明全等三角形即可,而在证明四边形为平行四边形时,先证明全等三角形,再根据全等三角形角的关系,得出两直线平行,进而得出四边形为平行四边形。

教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)

标准预测试卷(五) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】C。解析：因为函数 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ 是初等函数，且仅在 $x = 0$ 处无意义，所以 $f(x)$ 仅有一个间断点 $x = 0$ ，又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ ，所以 $x = 0$ 是第二类间断点。故本题选 C。

2. 【答案】D。解析：(方法一) 因为 $AB = O$ ，所以 B 的列向量都是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解，又 B 是非零矩阵，所以齐次线性方程组 $Ax = 0$ 一定有非零解，于是 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix} = a - 1 = 0$ ，解得 $a = 1$ 。故本题选 D。

(方法二) 因为 $AB = O$ ，所以有 $r(A) + r(B) \leq 3$ ，又 $B \neq O$ ，所以 $r(B) \geq 1$ ，于是 $r(A) < 3$ ，从而行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix} = a - 1 = 0$ ，解得 $a = 1$ 。故本题选 D。

3. 【答案】C。解析：已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，所以 $E(X) = \mu$ ，于是 $E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 2\mu + 1 = 5$ ，解得 $\mu = 2$ 。故本题选 C。

4. 【答案】A。解析：坐标平面 yOz 内的一条直线，① 如果平行于 z 轴，则直线绕 z 轴旋转一周得到的图形是圆柱面；② 如果与 z 轴相交但不垂直，则直线绕 z 轴旋转一周得到的图形是圆锥面；③ 如果与 z 轴垂直，则直线绕 z 轴旋转一周得到的图形是平面。故本题选 A。

5. 【答案】A。解析：二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵为矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。因为矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5),$$

所以矩阵 A 的特征值为 -1 (二重)， 5 ，于是矩阵 A 的正惯性指数为 1 ，负惯性指数为 2 ，从而二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形是 $-z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$ 。故本题选 A。

6. 【答案】B。解析：根据变上限积分求导公式， $F'(x) = f(\arctan x)(\arctan x)' - f(a^x)(a^x)' = \frac{1}{1+x^2}f(\arctan x) - a^x \ln a f(a^x)$ 。故本题选 B。

7. 【答案】D。解析：《义务教育数学课程标准(2011年版)》指出，教学中应当注意“预设”与“生成”的关系；面向全体学生与关注学生个体差异的关系；合情推理与演绎推理的关系；使用现代信息技术与教学手段多样化的关系。不包括理论与实践的关系。

8. 【答案】C。解析：数学抽象的思想、数学推理的思想和数学建模的思想是数学的基本思想。抽象是从现实问题到数学问题的发展，其思维特征是抽象能力强。推理是从数学问题到数学对象结论的发展，其思维特征是逻辑能力强。模型是多级、多次抽象和推理的结果、对象、结论的呈现形式，其思维特征是应用能力强。

二、简答题

9. 【参考答案】

设点 $P(x, y, z)$ 是满足条件的点，则由点到平面的距离公式知， $d = \frac{|4x - 2y - 4z - 5|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2}} = 2$ ，整理得，

点 P 的轨迹为 $4x - 2y - 4z - 17 = 0$ 或 $4x - 2y - 4z + 7 = 0$ 。

10. 【参考答案】

$$\begin{aligned}\int x \arctan x dx &= \int \arctan x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left(\frac{x^2}{2}\right) \arctan x - \frac{1}{2} \int x^2 d(\arctan x) \\&= \left(\frac{x^2}{2}\right) \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx \\&= \left(\frac{x^2}{2}\right) \arctan x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\&= \left(\frac{x^2}{2}\right) \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C \\&= \left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) \arctan x - \frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

11. 【参考答案】

由题意, $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 M 属于特征值 3 的一个特征向量, 所以 $\begin{bmatrix} a & 2 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 即 $\begin{bmatrix} a+2 \\ c+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, 于是 $a = 1, c = 2$, 从而 $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。

对矩阵 (M, E) 作初等行变换, 将左侧矩阵化成单位矩阵:

$$(M, E) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right] = (E, M^{-1}).$$

$$\text{因此, 矩阵 } M \text{ 的逆矩阵 } M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

12. 【参考答案】

教学中教师可以从以下三个方面培养学生发现与提出问题的能力:

一是创设情境, 营造发现和提出问题的氛围。通过创设问题情境, 让学生生疑, 诱发学生的问题意识, 同时让学生感到问题无处不在, 培养学生问题意识的习惯, 学会用数学的眼光观察现象, 用数学的思维分析问题。

二是放慢节奏, 留下发现问题和提出问题的时间。教师应改变观念, 转化角色, 在教学中营造一个宽松和谐的教学氛围, 建立平等的师生关系, 消除学生的畏惧心理, 鼓励学生大胆质疑, 提出问题, 同时要设法保护学生发问的积极性。

三是抓住机会, 指导发现和提出问题的方法。在教学中, 不但要让学生在一定的情境中, 发现问题、提出问题, 而且还要引领组织学生经历探求解决问题方法的过程, 这是培养学生解决问题能力的重要途径。

13. 【参考答案】

合作学习的前提是有一定挑战性的问题或任务, 在学生经过独立思考之后, 带着自己的意见和看法在小组中交流、倾听、理解、辨析同伴的意见, 并勇于表达自己的看法。适时的合作学习有助于学生解决问题, 并在此过程中获得敢于质疑、敢于创新、独立思考、合作交流的学习习惯。

设计有效的合作学习应做到以下几点:

- ① 设计合作学习的问题之前, 要充分给予学生独立思考的时间;
- ② 设计的合作学习的问题要有多样性和适度性, 要能够激发学生探究的兴趣, 建立学生学习数学的信心;
- ③ 教师要善于组织同学并把握合作学习进度, 必要时巡视指导;

④ 合作学习之后,教师要给学生相对轻松和愉快的展示平台,并做适当评价,注意多以鼓励为主。

三、解答题

14.【参考答案】

证明:由题意,放手后直线 l 落在函数 $f(x)$ 的图像上并支撑在点 $(\zeta, f(\zeta))$,所以对 $\forall x \in [a, b]$,有 $f(x) - \frac{f(\zeta)}{\zeta}x \leq 0$,且当 $x = \zeta$ 时等号成立(函数 $f(x) - \frac{f(\zeta)}{\zeta}x$ 在 $x = \zeta$ 处取得最大值0)。因为 $0 < a < b$,所以不等式两边同除 x 并移项得, $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(\zeta)}{\zeta}$ 。因此, $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $x = \zeta$ 处取得最大值。

引入辅助函数 $G(x) = f(x) - \frac{f(\zeta)}{\zeta}x$ 。因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 上可微,所以 $G(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 上可微,又根据前面的分析知,函数 $G(x)$ 在内点 $x = \zeta$ 处取得最大值0,所以 $x = \zeta$ 是函数 $G(x)$ 的极大值点,于是由费马定理知, $G'(\zeta) = f'(\zeta) - \frac{f(\zeta)}{\zeta} = 0$,即有 $f'(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta}$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

数学建模是一种数学思考方法,是运用数学的语言和方法,通过抽象、简化,建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段,使用数学语言描述的事物就称为数学模型,培养学生的模型思想有助于发挥学生的主观能动性,培养其一定的思维发散能力。

数学建模也是一种教学手段,为学生提供了自主学习空间,有助于学生体验数学在解决实际问题中的价值和作用;有助于学生体验数学与日常生活和其他学科的联系,体验综合运用知识和方法解决实际问题的过程,增强应用意识;有助于激发学生学习数学的兴趣,发展学生的创新意识和实践能力。

例如,在教学概率统计相关知识的时候,教师结合生活实际创设教学情境,并从中抽象出相应的数学问题,引导学生探索相应的数学方法来解决问题。其中,实际问题向数学表述的转化就是模型思想的充分体现。在这一过程中,学生可以直观地感受数学与生活实际的联系,感受数学在生活实际中的应用价值,从而激发学生学习数学的积极性,培养其相应的数学思想和思维能力。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 设计意图:引导学生发现新旧知识之间的联系,通过提问,引导学生说出正确答案,增强学生的自信心,调动学生的积极性,培养学生构造方程或方程组的意识,理解二元一次方程的解题思路,巩固解题步骤。

(2) 教师通过提问帮助学生回顾之前学过的知识,对学生的回答做出回应,评析学生的解题过程,和学生一起分析总结正确的解题思路,并在练习环节进行正确的指导,照顾了全体学生,让全体学生融入课堂,最后进行课堂小结,把所学知识整体呈现给学生,帮助学生更好地理解吸收。

有效的课堂提问有助于激发学生参与课堂活动的积极性,提高学习专注度,促进师生在课堂上的良性互动,提高课堂提问的有效性应做到以下方面:

① 提问要联系生活实际

根据教材内容的重点和难点来设计问题,提出符合学生认知程度的问题,做到对教学内容的深刻理解,站在学生的角度去提问。

② 提问要有针对性

教师要明确提问的目的,问题的设置要有层次,确保学生具有独立的思考空间,从而发展学生的创新意识。

③ 注重激发学生的学习兴趣

根据学生的兴趣爱好设置问题,这有助于提高学生学习的积极性,创造活发生动的课堂氛围,拉近师生之间的关系,保证教学活动的顺利进行。

④ 掌控问题难度,面向全体学生

了解学生的知识基础,能力差异,对全班学生有一个整体的认识,从而针对全体学生提出适应学生知识水平的问题,同时注重学生的个体差异,针对不同能力的学生提问不同难度的问题。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)①配方法是通过将一元二次方程配成完全平方式的形式,从而转化成两个一元一次方程进行求解。其基本步骤为先移项(把常数项移到方程的右边),再把二次项系数化为1,之后方程两边同时加上一次项系数一半的平方,从而化为完全平方式,最后进行开平方降次。

②运用公式法求解一元二次方程的前提是方程必须是一般形式的一元二次方程(即 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$),根据求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$) 即可求解。因为公式法是由配方法推导得出的,所以公式法的降次过程实质上与配方法相同。

③运用因式分解法进行求解的前提是方程的左边可以分解,方程的右边为0。因式分解法不是用开平方降次的,而是通过因式分解把方程化为两个一次多项式的乘积等于0的形式,再令这两个一次多项式分别等于0,从而实现降次。

(2) 教学过程

一、旧知回忆

教师带领学生回忆配方法解一元二次方程的相关旧知,之后给出相关习题供学生练习,然后找学生板演,教师评价。

习题:用配方法解下列方程。

$$\textcircled{1} x^2 - 8x + 1 = 0; \textcircled{2} x^2 - x - \frac{7}{4} = 0; \textcircled{3} x(x + 4) = 8x + 12。$$

二、新知探究

1. 提问:如何用配方法来求解一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$?

教师让学生运用配方法进行求解,并巡视指导。

2. 找学生板演过程,教师指导后做如下订正。

$$\because a \neq 0, \text{等式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ 两边同时除以 } a, \text{得 } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

$$\text{移项 } x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

$$\text{配方,等式两边同加 } \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\text{得 } x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

$$\text{即 } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}。$$

3. 提问: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 一定有解吗? 在什么情况下无解? 有解的条件是什么?

学生小组讨论后,得出结论,教师做如下归纳。

① 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时,等式右边是负数,此时一元二次方程无解。

② 现在讨论有解的情况:

当 $b^2 - 4ac = 0$ 时,等式右边是0,此时一元二次方程有两个相等的实解,即 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 等式右边是正数, 此时一元二次方程有两个不相等的实解, 即 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,
 $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

三、教师小结

教师结合板书和归纳内容, 进一步指出: 一元二次方程有、无解是通过 $b^2 - 4ac$ 判断的, 所以把 $b^2 - 4ac$ 称为根的判别式, 记为 Δ 。

教师进一步小结公式法: 对于一般形式 $(ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0))$ 的一元二次方程, 当 $\Delta \geq 0$ 时, 方程有解, 解为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

四、巩固练习

教师让学生运用公式法解课堂开始时给出的三道习题, 并做对比分析, 感受两种方法间的联系。

(3) 十字相乘法的主要步骤:

- ① 将二次项系数分解为两数乘积;
- ② 将常数项分解为两数乘积;
- ③ 交叉相乘所得和相加, 验证一次项系数是否与原一元二次方程相同。

公众号·编途指南

公众号·编途指南

公众号·编途指南